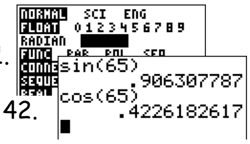
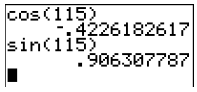
1a $\sin\alpha = \dfrac{\text{overstaande rechthoekszijde}}{\text{schuine zijde}} \Rightarrow$ (in figuur 8.1) $\sin 65^\circ = \dfrac{PQ}{OP} = \dfrac{PQ}{1} \Rightarrow PQ = 1 \cdot \sin 65^\circ \approx 0,91.$

$\cos\alpha = \dfrac{\text{aanliggende rechthoekszijde}}{\text{schuine zijde}} \Rightarrow$ (in figuur 8.1) $\cos 65^\circ = \dfrac{OQ}{OP} = \dfrac{OQ}{1} \Rightarrow OQ = 1 \cdot \cos 65^\circ \approx 0,42.$



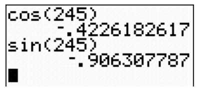
1b $P(0,42;\ 0,91)$. (zie hierboven)

2a $\angle POQ = 180^\circ - 115^\circ = 65^\circ$; weer is $PQ \approx 0,91$ en $OQ \approx 0,42$ (zie 1a) $\Rightarrow P(-0,42;\ 0,91)$.
(P in figuur 8.2a is het spiegelbeeld van P in figuur 8.1 ten opzichte van de y-as)



2b De GR geeft $\cos 115^\circ \approx -0,42$ en $\sin 115^\circ \approx 0,91$. Dus $x_P = \cos 115^\circ$ en $y_P = \sin 115^\circ$.

2c $\angle POQ = 245^\circ - 180^\circ = 65^\circ$; weer is $PQ \approx 0,91$ en $OQ \approx 0,42 \Rightarrow P(-0,42;\ -0,91)$.
(P in figuur 8.2b is het spiegelbeeld van P in figuur 8.2a ten opzichte van de x-as)
De GR geeft $\cos 245^\circ \approx -0,42$ en $\sin 245^\circ \approx -0,91$. Dus $x_P = \cos 245^\circ$ en $y_P = \sin 245^\circ$.



3a $\alpha = 0^\circ \Rightarrow P(1, 0) \Rightarrow \sin 0^\circ = y_P = 0.$

3b $\alpha = 0^\circ \Rightarrow P(1, 0) \Rightarrow \cos 0^\circ = x_P = 1.$

3c $\alpha = 90^\circ \Rightarrow P(0, 1) \Rightarrow \sin 90^\circ = y_P = 1.$

3d $\alpha = 90^\circ \Rightarrow P(0,\ 1) \Rightarrow \cos 90^\circ = x_P = 0.$

3e $\alpha = 270^\circ \Rightarrow P(0,\ -1) \Rightarrow \sin 270^\circ = y_P = -1.$

3f $\alpha = 270^\circ \Rightarrow P(0,\ -1) \Rightarrow \cos 270^\circ = x_P = 0.$

3g $\alpha = 360^\circ \Rightarrow P(1, 0) \Rightarrow \sin 360^\circ = y_P = 0.$

3h $\alpha = 360^\circ \Rightarrow P(1, 0) \Rightarrow \cos 360^\circ = x_P = 1.$

3i $\alpha = 450^\circ \Rightarrow P(0, 1) \Rightarrow \sin 450^\circ = y_P = 1.$

3j $\alpha = -90^\circ \Rightarrow P(0,\ -1) \Rightarrow \cos(-90^\circ) = x_P = 0.$

3k $\alpha = -540^\circ \Rightarrow P(-1, 0) \Rightarrow \sin(-540^\circ) = y_P = 0.$

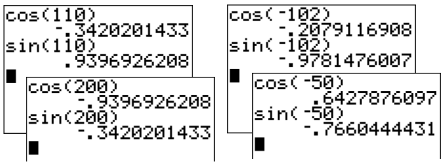
3l $\alpha = 1080^\circ \Rightarrow P(1, 0) \Rightarrow \cos(1080^\circ) = x_P = 1.$

3m $\alpha = 1980^\circ \Rightarrow P(-1, 0) \Rightarrow \sin(1980^\circ) = y_P = 0.$

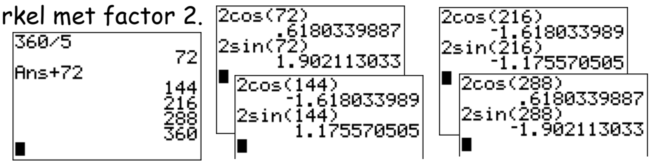
3n $\alpha = -180^\circ \Rightarrow P(-1, 0) \Rightarrow \cos(-180^\circ) = x_P = -1.$

3o $\alpha = 990^\circ \Rightarrow P(0,\ -1) \Rightarrow \sin(990^\circ) = y_P = -1.$

4 $P(\cos 110^\circ;\ \sin 110^\circ) \approx P(-0,34;\ 0,94).$
$Q(\cos 200^\circ;\ \sin 200^\circ) \approx Q(-0,94;\ -0,34).$
$R(\cos(-102^\circ);\ \sin(-102^\circ)) \approx R(-0,21;\ -0,98).$
$S(\cos(-50^\circ);\ \sin(-50^\circ)) \approx S(0,64;\ -0,77).$



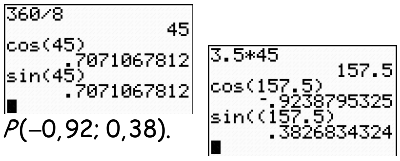
5 De cirkel is een vergroting van de eenheidscirkel met factor 2.
$B(2 \cdot \cos 72^\circ;\ 2 \cdot \sin 72^\circ) \approx B(0,62;\ 1,90).$
$C(2 \cdot \cos 144^\circ;\ 2 \cdot \sin 144^\circ) \approx C(-1,62;\ 1,18).$
$D(2 \cdot \cos 216^\circ;\ 2 \cdot \sin 216^\circ) \approx D(-1,62;\ -1,18).$
$E(2 \cdot \cos 288^\circ;\ 2 \cdot \sin 288^\circ) \approx E(0,62;\ -1,90).$



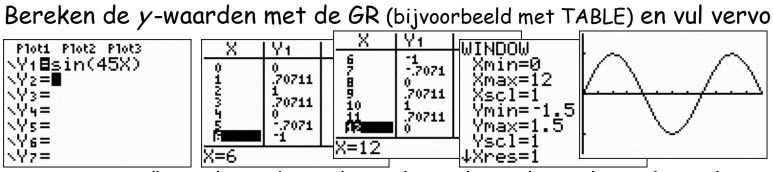
6a $t = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ \Rightarrow P(\cos 45^\circ,\ \sin 45^\circ) \approx P(0,71;\ 0,71).$

6b $t = 2 \Rightarrow \alpha = 2 \cdot 45^\circ = 90^\circ \Rightarrow P(0, 1).$

6c $t = 3\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 3\frac{1}{2} \cdot 45^\circ = 157,5^\circ \Rightarrow P(\cos 157,5^\circ;\ \sin 157,5^\circ) \approx P(-0,92;\ 0,38).$

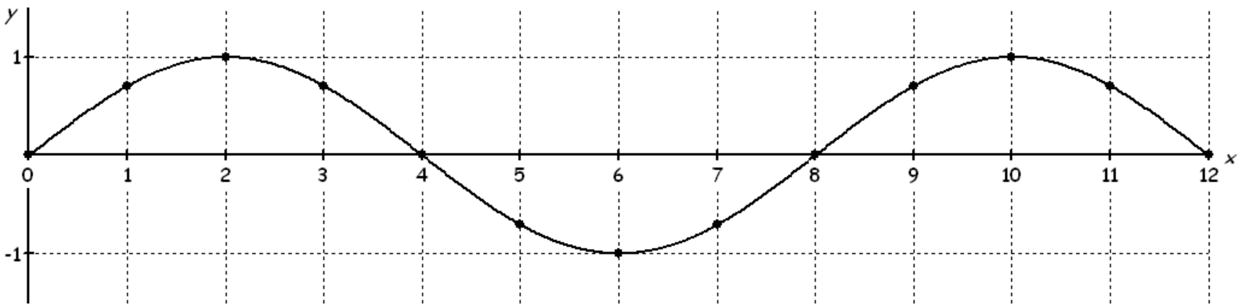


6d Bereken de y-waarden met de GR (bijvoorbeeld met TABLE) en vul vervolgens de tabel in (rond waar nodig af op 1 decimaal).



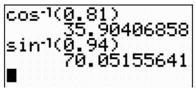
t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$y_P = \sin(45t)$	0	0,7	1	0,7	0	-0,7	-1	-0,7	0	0,7	1	0,7	0

6e Zie de schets hieronder (vergelijk de schets met de plot op de GR).



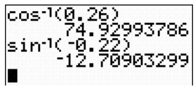
7a $x_P = \cos\alpha = 0{,}81$. De GR geeft $\cos^{-1}(0{,}81) \approx 36° \Rightarrow$ (zie figuur 8.12a) $\alpha \approx 36°$.

7b $y_P = \sin\alpha = 0{,}94$. De GR geeft $\sin^{-1}(0{,}94) \approx 70° \Rightarrow$ (zie figuur 8.12b) $\alpha \approx 180° - 70° = 110°$.

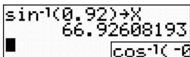


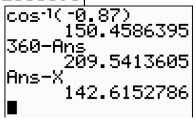
7c $x_P = \cos\alpha = 0{,}26$. De GR geeft $\cos^{-1}(0{,}26) \approx 75° \Rightarrow$ (zie figuur 8.12c) $\alpha \approx -75°$.

7d $y_P = \sin\alpha = -0{,}22$. De GR geeft $\sin^{-1}(-0{,}22) \approx -13° \Rightarrow$ (zie figuur 8.12d) $\alpha \approx 180° + 13° = 193°$.



8 $y_P = \sin\alpha = 0{,}92$. De GR geeft $\sin^{-1}(0{,}92) \approx 66{,}9...° \Rightarrow$ (zie figuur 8.13) $\alpha_P \approx 66{,}9...°$.
$x_Q = \cos\alpha = -0{,}87$. De GR geeft $\cos^{-1}(-0{,}87) \approx 150{,}4...° \Rightarrow \alpha_Q \approx 360° - 150{,}4...° = 209{,}5...°$.
$\angle POQ = \alpha_Q - \alpha_P = 209{,}5... - 66{,}9... \approx 143°$.





9a omtrek $= 2\pi r = 2\pi \cdot 1 = 2\pi$.

9b $\alpha = 90° \Rightarrow$ een kwart van de eenheidscirkel doorlopen.
De lengte van de door P doorlopen cirkelboog is $\frac{1}{4} \cdot 2\pi = \frac{2}{4}\pi = \frac{1}{2}\pi$.

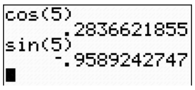
9c Zie de tabel hiernaast.

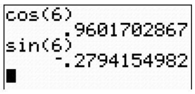
draaiingshoek α	0°	90°	180°	270°	360°
lengte cirkelboog b	0	$\frac{1}{2}\pi$	π	$1\frac{1}{2}\pi$	2π

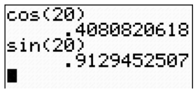
10a $P(\cos 5\,\text{rad}, \sin 5\,\text{rad}) \approx P(0{,}28;\ -0{,}96)$.

10b $P(\cos 6\,\text{rad}, \sin 6\,\text{rad}) \approx P(0{,}96;\ -0{,}28)$.

10c $P(\cos 20\,\text{rad}, \sin 20\,\text{rad}) \approx P(0{,}41;\ 0{,}91)$.







11a De door P doorlopen cirkelboog is $\frac{1}{2}\pi$ (een kwart cirkel doorlopen) $\Rightarrow P$ ligt boven in de eenheidscirkel $\Rightarrow P(0, 1)$.

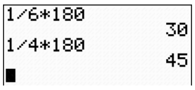
11b De door P doorlopen cirkelboog is π (een halve cirkel doorlopen) $\Rightarrow P$ ligt links in de eenheidscirkel $\Rightarrow P(-1, 0)$.

11c De door P doorlopen cirkelboog is $1\frac{1}{2}\pi$ (driekwart cirkel doorlopen) $\Rightarrow P$ ligt onder in de eenheidscirkel $\Rightarrow P(0,\ -1)$.

graden	180	12a	12b	12c	12d	12e	12f	12g	12h
radialen	π	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	2π	2	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{5}{4}$	$-2\frac{1}{3}\pi$	$-2\frac{1}{3}$

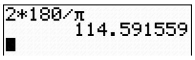
12a $\frac{1}{6}\pi\,\text{rad} = \frac{1}{6} \cdot 180° = 30°$.

12b $\frac{1}{4}\pi\,\text{rad} = \frac{1}{4} \cdot 180° = 45°$.



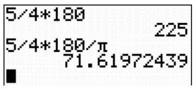
12c $2\pi\,\text{rad} = 2 \cdot 180° = 360°$.

12d $2\,\text{rad} = 2 \cdot 180° : \pi \approx 114{,}6°$.



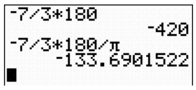
12e $\frac{5}{4}\pi\,\text{rad} = \frac{5}{4} \cdot 180° = 225°$.

12f $\frac{5}{4}\,\text{rad} = \frac{5}{4} \cdot 180° : \pi \approx 71{,}6°$.



12g $-2\frac{1}{3}\pi\,\text{rad} = -2\frac{1}{3} \cdot 180° = -420°$.

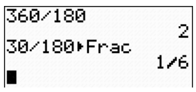
12h $-2\frac{1}{3}\,\text{rad} = -2\frac{1}{3} \cdot 180° : \pi \approx -133{,}7°$.



graden	180	360	30	−45	60	90	135	−75	240	300	720	400	0	210	−5	540	1
radialen	π	13a	13b	13c	13d	13e	13f	13g	13h	13i	13j	13k	13l	13m	13n	13o	13p

13a $360° = \frac{360 \cdot \pi}{180}\,\text{rad} = 2\pi\,\text{rad}$.

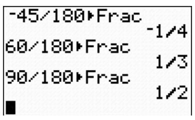
13b $30° = \frac{30 \cdot \pi}{180}\,\text{rad} = \frac{1}{6}\pi\,\text{rad}$.



13c $-45° = \frac{-45 \cdot \pi}{180}\,\text{rad} = -\frac{1}{4}\pi\,\text{rad}$.

13d $60° = \frac{60 \cdot \pi}{180}\,\text{rad} = \frac{1}{3}\pi\,\text{rad}$.

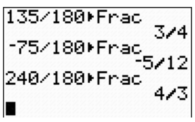
13e $90° = \frac{90 \cdot \pi}{180}\,\text{rad} = \frac{1}{2}\pi\,\text{rad}$.



13f $135° = \frac{135 \cdot \pi}{180}\,\text{rad} = \frac{3}{4}\pi\,\text{rad}$.

13g $-75° = \frac{-75 \cdot \pi}{180}\,\text{rad} = -\frac{5}{12}\pi\,\text{rad}$.

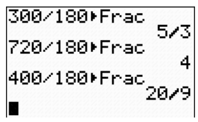
13h $240° = \frac{240 \cdot \pi}{180}\,\text{rad} = \frac{4}{3}\pi\,\text{rad}$.



13i $300° = \frac{300 \cdot \pi}{180}\,\text{rad} = \frac{5}{3}\pi\,\text{rad}$.

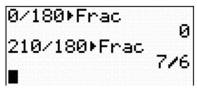
13j $720° = \frac{720 \cdot \pi}{180}\,\text{rad} = 4\pi\,\text{rad}$.

13k $400° = \frac{400 \cdot \pi}{180}\,\text{rad} = \frac{20}{9}\pi\,\text{rad}$.



13l $0° = 0\,\text{rad}$.

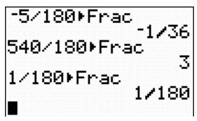
13m $210° = \frac{210 \cdot \pi}{180}\,\text{rad} = \frac{7}{6}\pi\,\text{rad}$.



13n $-5° = \frac{-5 \cdot \pi}{180}\,\text{rad} = -\frac{1}{36}\pi\,\text{rad}$.

13o $540° = \frac{540 \cdot \pi}{180}\,\text{rad} = 3\pi\,\text{rad}$.

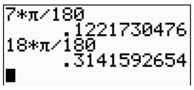
13p $1° = \frac{1 \cdot \pi}{180}\,\text{rad} = \frac{1}{180}\pi\,\text{rad}$.



graden	180	7	18	−51,3	1,7	−320	1030	90	57
radialen	π	14a	14b	14c	14d	14e	14f	14g	14h

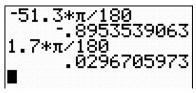
14a $7° = \frac{7 \cdot \pi}{180}\,\text{rad} \approx 0{,}12\,\text{rad}$.

14b $18° = \frac{18 \cdot \pi}{180}\,\text{rad} \approx 0{,}31\,\text{rad}$.



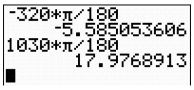
14c $-51{,}3° = \frac{-51{,}3 \cdot \pi}{180}\,\text{rad} \approx -0{,}90\,\text{rad}$.

14d $1{,}7° = \frac{1{,}7 \cdot \pi}{180}\,\text{rad} \approx 0{,}03\,\text{rad}$.



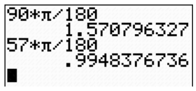
14e $-320° = \frac{-320 \cdot \pi}{180}$ rad $\approx -5{,}59$ rad.

14f $1030° = \frac{1030 \cdot \pi}{180}$ rad $\approx 17{,}98$ rad.



14g $90° = \frac{90 \cdot \pi}{180}$ rad $\approx 1{,}57$ rad.

14h $57° = \frac{57 \cdot \pi}{180}$ rad $\approx 0{,}99$ rad.

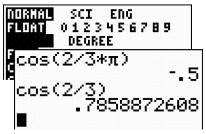


15 Zie de tabel hieronder.

graden	180	0	30	45	60	90	135	180	240	315	360
radialen	π	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$1\frac{1}{3}\pi$	$1\frac{3}{4}\pi$	2π

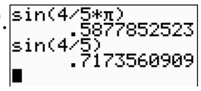
16a $\cos(\frac{2}{3}\pi) = -0{,}5$.

16b $\cos(\frac{2}{3}) \approx 0{,}79$.



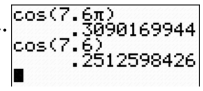
16c $\sin(\frac{4}{5}\pi) \approx 0{,}59$.

16d $\sin(\frac{4}{5}) \approx 0{,}72$.



16e $\cos(7{,}6\pi) \approx 0{,}31$.

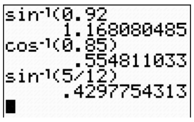
16f $\cos(7{,}6) \approx 0{,}25$.



17a $\alpha = \sin^{-1}(0{,}92) \approx 1{,}17$.

17b $\alpha = \cos^{-1}(0{,}85) \approx 0{,}55$.

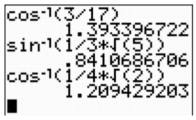
17c $\alpha = \sin^{-1}(\frac{5}{12}) \approx 0{,}43$.



17d $\alpha = \cos^{-1}(\frac{3}{17}) \approx 1{,}39$.

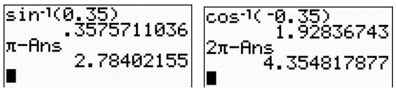
17e $\alpha = \sin^{-1}(\frac{1}{3}\sqrt{5}) \approx 0{,}84$.

17f $\alpha = \cos^{-1}(\frac{1}{4}\sqrt{2}) \approx 1{,}21$.

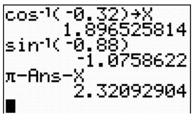


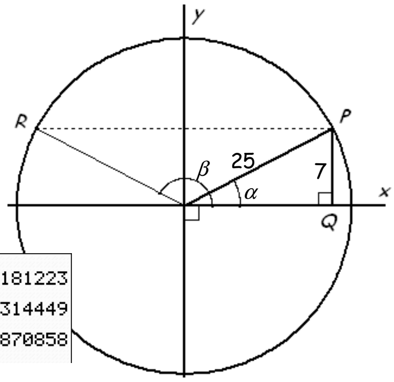
18a $\sin^{-1}(0{,}35) = 0{,}35... \Rightarrow \alpha = \pi - \sin^{-1}(0{,}35) \approx 2{,}78$.

18b $\cos^{-1}(-0{,}35) = 1{,}92... \Rightarrow \alpha = 2\pi - \cos^{-1}(-0{,}35) \approx 4{,}35$.



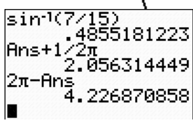
19 $\cos^{-1}(-0{,}32) = 1{,}89... \Rightarrow \alpha_P \approx 1{,}89$ en
$\sin^{-1}(-0{,}88) = -1{,}07... \Rightarrow \alpha_Q = \pi + 1{,}07...$
$\angle POQ = \alpha_Q - \alpha_P \approx 2{,}32$.



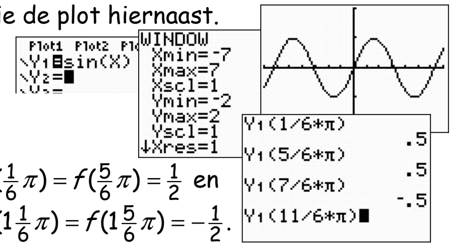


20a Zie de figuur hiernaast.
Op 23 meter hoogte $\Rightarrow 23 - 1 - 15 = 7$ meter boven de x-as.
$\sin\alpha = \frac{7}{15} \Rightarrow \alpha = \sin^{-1}(\frac{7}{15}) \approx 0{,}48...$ (rad).
Sanne is gedraaid over een hoek van $\frac{1}{2}\pi + \sin^{-1}(\frac{7}{15}) \approx 2{,}06$ radialen.

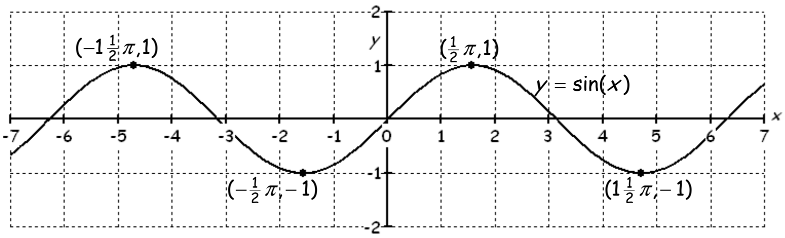
20b Sanne is gedraaid over een hoek van $2\pi - \text{Ans} \approx 4{,}23$ radialen.



21a Zie de plot hiernaast.



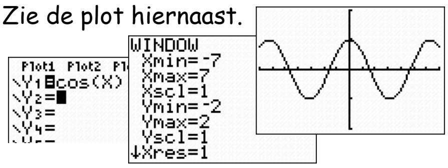
21b $f(\frac{1}{6}\pi) = f(\frac{5}{6}\pi) = \frac{1}{2}$ en
$f(1\frac{1}{6}\pi) = f(1\frac{5}{6}\pi) = -\frac{1}{2}$.

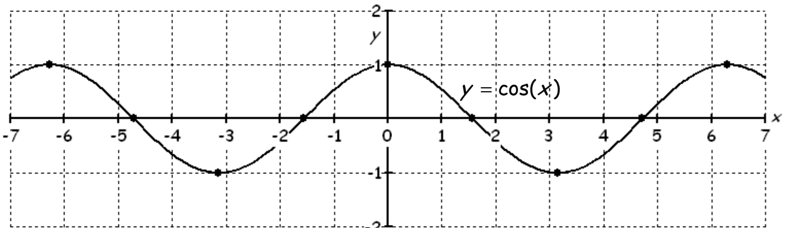


21c Zie de grafiek hierboven; de toppen zijn $(-1\frac{1}{2}\pi, 1)$; $(-\frac{1}{2}\pi, -1)$; $(\frac{1}{2}\pi, 1)$ en $(1\frac{1}{2}\pi, -1)$. (lees af in de eenheidscirkel)

21d De nulpunten zijn -2π, $-\pi$, 0, π en 2π. (lees af in de eenheidscirkel)

22a Zie de plot hiernaast.



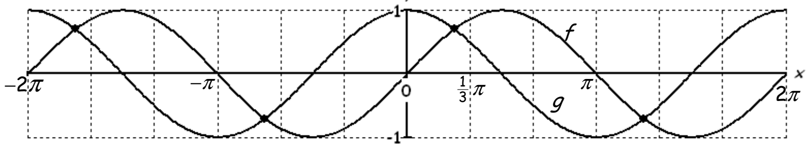


22b Zie de grafiek hiernaast.

22c De toppen zijn $(-2\pi, 1)$; $(-\pi, -1)$; $(0, 1)$; $(\pi, -1)$ en $(2\pi, 1)$. (lees af in de eenheidscirkel)

22d De nulpunten zijn $-1\frac{1}{2}\pi$, $-\frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$ en $1\frac{1}{2}\pi$. (lees af in de eenheidscirkel)

23a Zie beide grafieken in de figuur hiernaast.



23b $\alpha = \frac{1}{4}\pi \Rightarrow$ in eenheidscirkel is $x_P = y_P$.
Dus ook $\alpha = -1\frac{3}{4}\pi$, $\alpha = -\frac{3}{4}\pi$ en $\alpha = 1\frac{1}{4}\pi$.

24a $f(x) = \sin(x)$
$\Downarrow$ ....translatie (0, 2)
$g(x) = 2 + \sin(x)$ met evenwichtsstand 2.

24b $f(x) = \sin(x)$
$\Downarrow$ ....translatie (3, 0)
$h(x) = \sin(x - 3)$.

24c $f(x) = \sin(x)$
$\Downarrow$ ....verm. t.o.v. de x-as met 4
$k(x) = 4\sin(x)$ met amplitude 4.

24d $f(x) = \sin(x)$
$\Downarrow$ ....verm. t.o.v. de y-as met $\frac{1}{5}$
$l(x) = \sin(5x)$ met periode $\frac{2\pi}{5} = \frac{2}{5}\pi$.

25a

	evenwichtsstand	amplitude	periode	beginpunt
$y = \sin(x)$	0	1	2π	(0, 0)
$\Downarrow$ ....verm. t.o.v. de x-as met 2				
$y = 2\sin(x)$	0	2	2π	(0, 0)
$\Downarrow$ ....translatie (−3, 0)				
$f(x) = 2\sin(x + 3)$	0	2	2π	(−3, 0).

25b

	evenwichtsstand	amplitude	periode	beginpunt
$y = \sin(x)$	0	1	2π	(0, 0)
$\Downarrow$ ....verm. t.o.v. de x-as met $\frac{1}{3}$				
$y = \frac{1}{3}\sin(x)$	0	$\frac{1}{3}$	2π	(0, 0)
$\Downarrow$ ....translatie (0, $\frac{1}{5}$)				
$g(x) = \frac{1}{3}\sin(x) + \frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	2π	(0, $\frac{1}{5}$).

25c

	evenwichtsstand	amplitude	periode	beginpunt
$y = \cos(x)$	0	1	2π	(0, 1)
$\Downarrow$ ....verm. t.o.v. de y-as met $\frac{1}{3}$				
$y = \cos(3x)$	0	1	$\frac{2}{3}\pi$	(0, 1)
$\Downarrow$ ....translatie (4, 0)				
$h(x) = \cos(3(x - 4))$	0	1	$\frac{2}{3}\pi$	(4, 1).

25d

	evenwichtsstand	amplitude	periode	beginpunt
$y = \cos(x)$	0	1	2π	(0, 1)
$\Downarrow$ ....verm. t.o.v. de x-as met $1\frac{1}{2}$				
$y = 1\frac{1}{2}\cos(x)$	0	$1\frac{1}{2}$	2π	(0, $1\frac{1}{2}$)
$\Downarrow$ ....verm. t.o.v. de y-as met 4				
$j(x) = 1\frac{1}{2}\cos(\frac{1}{4}x)$	0	$1\frac{1}{2}$	8π	(0, $1\frac{1}{2}$).

26a

	evenwichtsstand	amplitude	periode	beginpunt
$y = \cos(x)$	0	1	2π	(0, 1)
$\Downarrow$ ....verm. t.o.v. de x-as met 1,2				
$y = 1{,}2\cos(x)$	0	1,2	2π	(0; 1,2)
$\Downarrow$ ....translatie ($\frac{1}{6}\pi$, 5)				
$f(x) = 5 + 1{,}2\cos(x - \frac{1}{6}\pi)$	5	1,2	2π	($\frac{1}{6}\pi$; 6,2).

26b

	evenwichtsstand	amplitude	periode	beginpunt
$y = \sin(x)$	0	1	2π	(0, 0)
$\Downarrow$ ....verm. t.o.v. de y-as met 5				
$y = \sin(\frac{1}{5}x)$	0	1	10π	(0, 0)
$\Downarrow$ ....translatie ($-\frac{1}{3}\pi$; 0,4)				
$g(x) = 0{,}4 + \sin(\frac{1}{5}(x + \frac{1}{3}\pi))$	0,4	1	10π	($-\frac{1}{3}\pi$; 0,4).

26c

	evenwichtsstand	amplitude	periode	beginpunt
$y = \cos(x)$	0	1	2π	(0, 1)
$\Downarrow$ ....verm. t.o.v. de x-as met 0,29				
$y = 0{,}29\cos(x)$	0	0,29	2π	(0; 0,29)
$\Downarrow$ ....verm. t.o.v. de y-as met $\frac{1}{3}$				
$y = 0{,}29\cos(3x)$	0	0,29	$\frac{2}{3}\pi$	(0; 0,29)
$\Downarrow$ ....translatie (−1,4; 0)				
$h(x) = 0{,}29\cos(3(x + 1{,}4))$	0	0,29	$\frac{2}{3}\pi$	(−1,4; 0,29).

26d

	evenwichtsstand	amplitude	periode	beginpunt
$y = \sin(x)$	0	1	2π	(0, 0)
$\Downarrow$ ....verm. t.o.v. de x-as met 2				
$y = 2\sin(x)$	0	2	2π	(0, 0)
$\Downarrow$ ....verm. t.o.v. de y-as met $\frac{1}{3}$				
$y = 2\sin(3x)$	0	2	$\frac{2}{3}\pi$	(0, 0)
$\Downarrow$ ....translatie ($\frac{1}{2}\pi$; −0,8)				
$j(x) = -0{,}8 + 2\sin(3(x - \frac{1}{2}\pi))$	−0,8	2	$\frac{2}{3}\pi$	($\frac{1}{2}\pi$; −0,8).

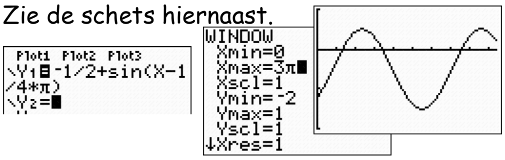
27 $y = \sin(x)$
$\Downarrow$ ....verm. t.o.v. de y-as met 3
$y = \sin(\frac{1}{3}x)$
$\Downarrow$ ....translatie (4; −1,5)
$f(x) = -1{,}5 + \sin(\frac{1}{3}(x - 4))$.

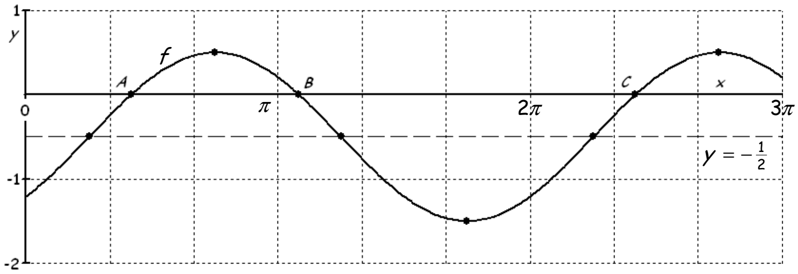
28a $y = \cos(x)$
$\Downarrow$ .....translatie $(\frac{1}{4}\pi,\ 4)$
$y = 4 + \cos(x - \frac{1}{4}\pi)$
$\Downarrow$ .....verm. t.o.v. de x-as met 3
$f(x) = 3(4 + \cos(x - \frac{1}{4}\pi) = 12 + 3\cos(x - \frac{1}{4}\pi).$

28b $y = \cos(x)$
$\Downarrow$ .....verm. t.o.v. de x-as met 3
$y = 3\cos(x)$
$\Downarrow$ .....translatie $(\frac{1}{4}\pi,\ 4)$
$g(x) = 4 + 3\cos(x - \frac{1}{4}\pi).$

29a a en $k(x) = \sin(2x) - \frac{1}{2}$; b en $f(x) = 1\frac{1}{2}\sin(2x)$; c en $g(x) = 1\frac{1}{2}\sin(x) + 1$; d en $h(x) = 2\sin(1\frac{1}{2}x)$.

30a Zie de schets hiernaast.





30b De grafiek van f snijdt de evenwichtsstand in $(\frac{1}{4}\pi,\ -\frac{1}{2})$; $(1\frac{1}{4}\pi,\ -\frac{1}{2})$ en $(2\frac{1}{4}\pi,\ -\frac{1}{2})$.

30c De toppen van de grafiek van f zijn $(\frac{3}{4}\pi,\ \frac{1}{2})$; $(1\frac{3}{4}\pi,\ -1\frac{1}{2})$ en $(2\frac{3}{4}\pi,\ \frac{1}{2})$.

30d De afstand AC is precies één periode van f, dus 2π.

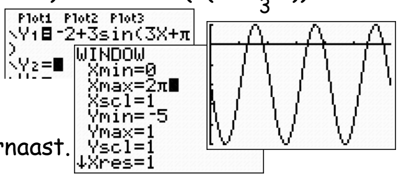
31a

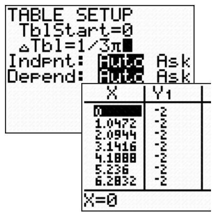
	evenwichtsstand	amplitude	periode	beginpunt
$y = \sin(x)$	0	1	2π	(0, 0)
$\Downarrow$ .....verm. t.o.v. de x-as met 3				
$y = 3\sin(x)$	0	3	2π	(0, 0)
$\Downarrow$ .....translatie $(\frac{1}{4}\pi,\ 2)$				
$f(x) = 2 + 3\sin(x - \frac{1}{4}\pi)$	2	3	2π	$(\frac{1}{4}\pi,\ 2)$.

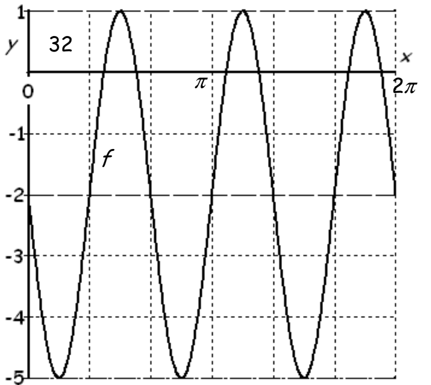
31b $g(x) = 4 + 2\sin(x - \frac{1}{3}\pi)$
evenwichtsstand 4
amplitude 2
periode 2π
beginpunt $(\frac{1}{3}\pi,\ 4)$.

31c $h(x) = \sin(3(x - \frac{1}{2}\pi))$
evenwichtsstand 0
amplitude 1
periode $\frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$
beginpunt $(\frac{1}{2}\pi,\ 0)$.

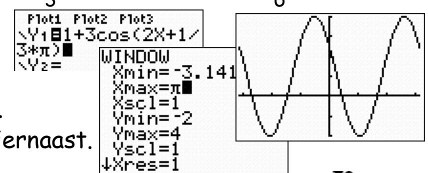
32 $f(x) = -2 + 3\sin(3x + \pi) = -2 + 3\sin(3(x + \frac{1}{3}\pi))$
evenwichtsstand -2
amplitude 3
periode $\frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$
beginpunt $(-\frac{1}{3}\pi,\ -2)$.
Zie de grafiek hiernaast.

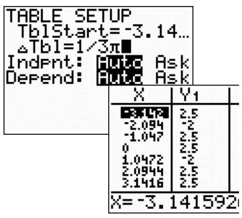


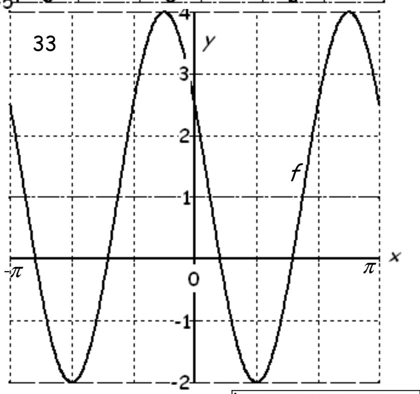




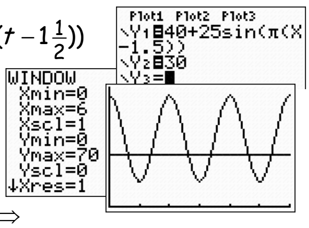
33 $f(x) = 1 + 3\cos(2x + \frac{1}{3}\pi) = 1 + 3\cos(2(x + \frac{1}{6}\pi))$
evenwichtsstand 1
amplitude 3
periode $\frac{2\pi}{2} = \pi$
beginpunt $(-\frac{1}{6}\pi,\ 4)$.
Zie de grafiek hiernaast.

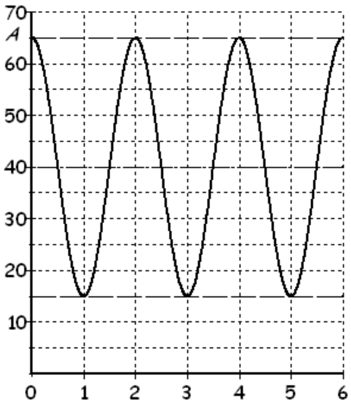






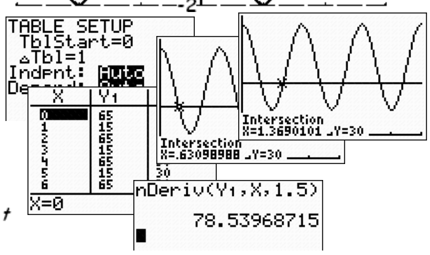
34a $A = 40 + 25\sin(\pi(t - 1\frac{1}{2}))$
evenwichtsstand 40
amplitude 25
periode $\frac{2\pi}{\pi} = 2$
beginpunt $(1\frac{1}{2},\ 40)$.
Zie hiernaast.



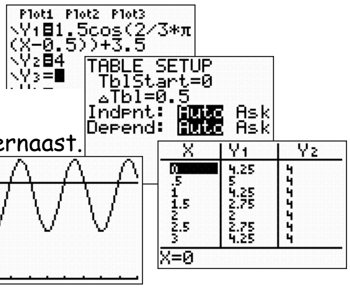


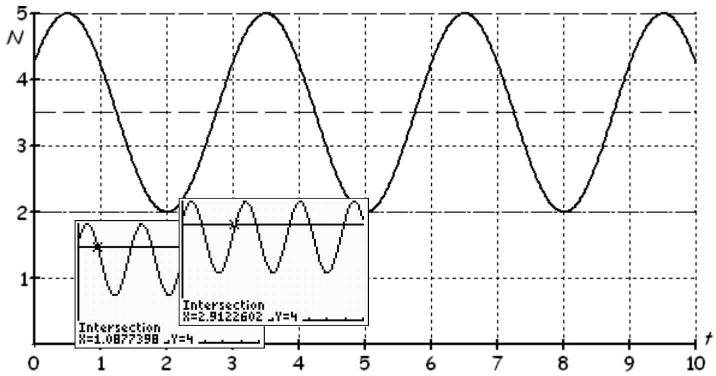
34b $A = 30$ (intersect) $\Rightarrow$
$t \approx 0{,}63 \vee t \approx 1{,}37$ (met periode 2 $\Rightarrow$) $\vee$
$t \approx 2{,}63 \vee t \approx 3{,}37 \vee t \approx 4{,}63 \vee t \approx 5{,}37.$
$A < 30$ (zie een plot) $\Rightarrow 0{,}63 < t < 1{,}37 \vee$
$2{,}63 < t < 3{,}37 \vee 4{,}63 < t < 5{,}37.$

34c De helling in beginpunt is $\left[\frac{dA}{dt}\right]_{t=1{,}5} \approx 78{,}5.$



35a $N = 1{,}5\cos(\frac{2}{3}\pi(t - 0{,}5)) + 3{,}5$
evenwichtsstand 3,5
amplitude 1,5
periode $\frac{2\pi}{\frac{2}{3}\pi} = \frac{6\pi}{2\pi} = 3$
beginpunt (0,5; 5).
Zie de grafiek hiernaast.





35b $N = 4$ (intersect) $\Rightarrow t \approx 1{,}09 \vee t \approx 2{,}91$ (periode 3 $\Rightarrow$) $\vee\ t \approx 4{,}09 \vee t \approx 5{,}91 \vee t \approx 7{,}09 \vee t \approx 8{,}91$.
$N > 4$ (zie een plot) $\Rightarrow 0 < t < 1{,}09 \vee 2{,}91 < t < 4{,}09 \vee 5{,}91 < t < 7{,}09 \vee 8{,}91 < t < 10$.

35c De helling in het snijpunt met de verticale as is $\left[\frac{dN}{dt}\right]_{t=0} \approx 2{,}72$.

35d De grootste helling is $\left[\frac{dN}{dt}\right]_{t=2{,}75} \approx 3{,}14$. (midden tussen het minimum bij $t = 1$ en het maximum bij $t = 3{,}5$)

36a De evenwichtsstand is $\frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3$, de amplitude is $\frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2$ (of $5 - 3 = 2$) en de periode is $2\frac{5}{6}\pi - \frac{5}{6}\pi = 2\pi$.

36b $f(x) = 3 + 2\sin(x - \frac{1}{3}\pi)$. Dus $a = 3$, $b = 2$, $c = 1$ en $d = \frac{1}{3}\pi$.

37a De evenwichtsstand is $\frac{60 + -20}{2} = \frac{40}{2} = 20 = a$, de amplitude is $\frac{60 - -20}{2} = \frac{80}{2} = 40 = b$ (of $60 - 20 = 40$) en
de periode is $80 - 30 = 50 = \frac{2\pi}{c} \Rightarrow c = \frac{2\pi}{50} = \frac{\pi}{25}$.
De grafiek gaat stijgend door de evenwichtsstand (beginpunt van sinus) voor $x = 0 \Rightarrow d = 0$.
Een passende formule met een sinus is: $y = 20 + 40\sin(\frac{\pi}{25}x)$.

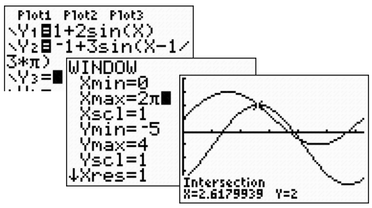
37b De grafiek gaat door een hoogste punt (beginpunt van cosinus) voor $x = 12\frac{1}{2} \Rightarrow d = 12\frac{1}{2}$ ($\frac{1}{4}$ periode na $x = 0$).
Een passende formule met een cosinus is: $y = 20 + 40\sin(\frac{\pi}{25}(x - 12\frac{1}{2}))$.

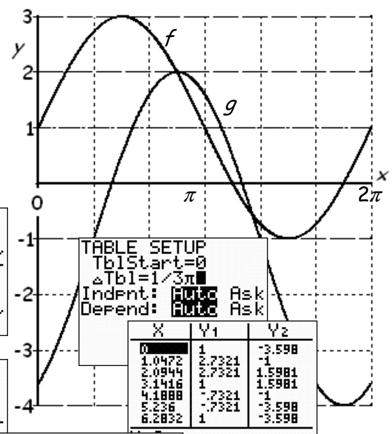
38a De evenwichtsstand is $\frac{100 + -220}{2} = \frac{-120}{2} = -60 = a$, de amplitude is $\frac{100 - -220}{2} = \frac{320}{2} = 160 = b$ (of $100 - -60 = 160$) en
de periode is $7 - 0{,}2 = 6{,}8 = \frac{2\pi}{c} \Rightarrow c = \frac{2\pi}{6{,}8} = \frac{10\pi}{34}$.
De grafiek gaat stijgend door de evenwichtsstand (beginpunt van sinus) voor $t = 4 \Rightarrow d = 4$.
Een passende formule met een sinus is: $N = -60 + 160\sin(\frac{10\pi}{34}(t - 4))$.

38b De grafiek gaat door een hoogste punt (beginpunt van cosinus) voor $t = 4 + \frac{1}{4} \cdot 6{,}8 = 5{,}7 \Rightarrow d = 5{,}7$ ($\frac{1}{4}$ periode na $t = 4$).
Een passende formule met een cosinus is: $N = -60 + 160\cos(\frac{10\pi}{34}(t - 5{,}7))$.

39a $f(x) = 1 + 2\sin(x)$
evenwichtsstand 1
amplitude 2
periode 2π
beginpunt (0, 1).

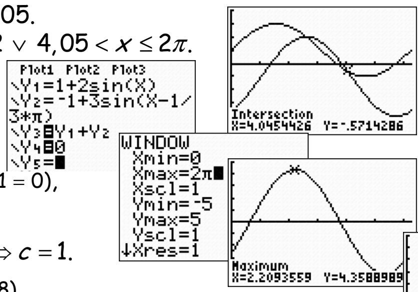
$g(x) = -1 + 3\sin(x - \frac{1}{3}\pi)$
evenwichtsstand -1
amplitude 3
periode 2π
beginpunt ($\frac{1}{3}\pi$, -1).

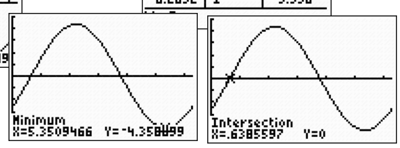




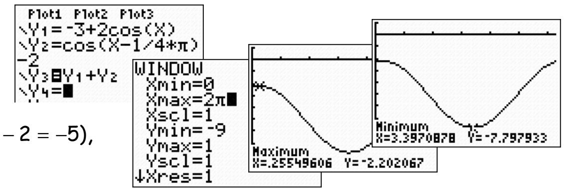
39b $f(x) = g(x)$ (intersect) $\Rightarrow x \approx 2{,}62 \vee x \approx 4{,}05$.
$f(x) > g(x)$ (zie plot/grafiek) $\Rightarrow 0 \le x < 2{,}62 \vee 4{,}05 < x \le 2\pi$.

39c $s(x) = a + b\sin(c(x - d))$
$s(x)$ (optie maximum) $\Rightarrow$ top (2,21; 4,36)
$s(x)$ (optie minimum) $\Rightarrow$ top (5,35; $-$4,36).
Evenwichtsstand $a \approx \frac{4{,}36 + -4{,}36}{2} = 0$ (of $1 - 1 = 0$),
amplitude $b \approx 4{,}36 - 0 = 4{,}36$ en
de periode is (net als bij f en bij g) $2\pi = \frac{2\pi}{c} \Rightarrow c = 1$.
(of de periode is $(5{,}35 - 2{,}21) \times 2 = 3{,}14 \times 2 = 6{,}28$)
De grafiek gaat stijgend door de evenwichtsstand
(beginpunt van sinus) voor $s(x) = 0$ (intersect) $\Rightarrow x \approx 0{,}64 \Rightarrow d \approx 0{,}64$.
Een passende formule is $s(x) \approx 4{,}36\sin(x - 0{,}64)$.

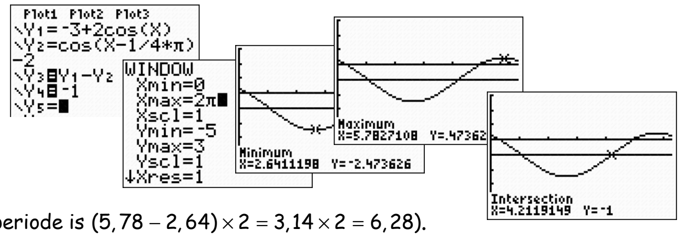




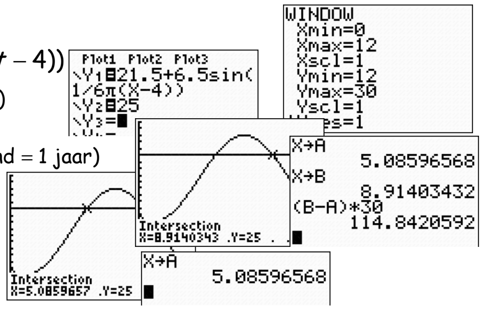
40a $s(x) = a + b\cos(c(x - d))$
$s(x)$ (optie maximum) $\Rightarrow$ top $(0{,}26;\ -2{,}20)$
$s(x)$ (optie minimum) $\Rightarrow$ top $(3{,}40;\ -7{,}80)$.
Evenwichtsstand $a \approx \frac{-2{,}20 + -7{,}80}{2} = -5$ (of $-3 - 2 = -5$),
amplitude $b \approx -2{,}20 - -5 = 2{,}80$ en
de periode is (net als bij f en bij g) $2\pi = \frac{2\pi}{c} \Rightarrow c = 1$ (of de periode is $(3{,}40 - 0{,}26) \times 2 = 3{,}14 \times 2 = 6{,}28$).
De grafiek gaat door een hoogste punt (beginpunt van cosinus) voor $x \approx 0{,}26 \Rightarrow d \approx 0{,}26$.
Een passende formule is $s(x) \approx -5 + 2{,}80\cos(x - 0{,}26)$.

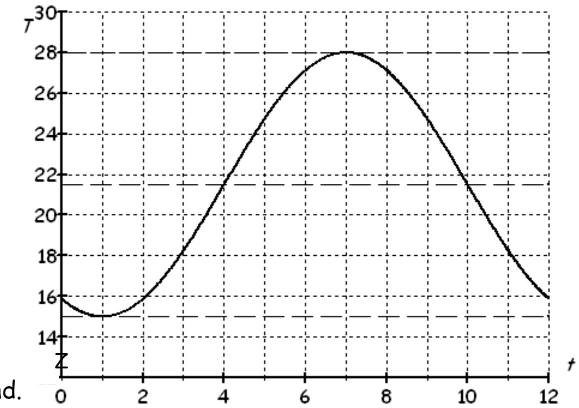


40b $v(x) = a + b\sin(c(x - d))$
$v(x)$ (optie minimum) $\Rightarrow$ top $(2{,}64;\ -2{,}47)$
$v(x)$ (optie maximum) $\Rightarrow$ top $(5{,}78;\ 0{,}47)$.
Evenwichtsstand $a \approx \frac{0{,}47 + -2{,}47}{2} = -1$ (of $-3 - -2 = -1$),
amplitude $b \approx 0{,}47 - -1 = 1{,}47$ en
de periode is (net als bij f en bij g) $2\pi = \frac{2\pi}{c} \Rightarrow c = 1$ (of de periode is $(5{,}78 - 2{,}64) \times 2 = 3{,}14 \times 2 = 6{,}28$).
De grafiek gaat stijgend door de evenwichtsstand (beginpunt van sinus) voor $v(x) = 1$ (intersect) $\Rightarrow x \approx 4{,}21 \Rightarrow d \approx 4{,}21$.
Een passende formule is $v(x) \approx -1 + 1{,}47\sin(x - 4{,}21)$.



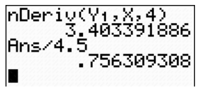
41a $T = 21{,}5 + 6{,}5\sin(\frac{1}{6}\pi(t - 4))$
evenwichtsstand 21,5 (°C)
amplitude 6,5 (°C)
periode $\frac{2\pi}{\frac{1}{6}\pi} = \frac{12\pi}{\pi} = 12$ (mnd = 1 jaar)
beginpunt (4; 21,5).
Zie hiernaast.





41b $T = 25$ (intersect) $\Rightarrow$
$t \approx 5{,}0... \vee t \approx 8{,}9...$
$T > 25$ (intersect) $\Rightarrow 5{,}0... < t < 8{,}9...$
Dus gedurende $8{,}9... - 5{,}0...$ maanden of (ongeveer) 115 dagen.

41c De stijging is het sterkst bij het passeren van de evenwichtsstand.
De sterkste stijging is $\left[\frac{dT}{dt}\right]_{t=4} \approx 3{,}40$ °C per maand. Dit is (ongeveer) 0,8 °C per week.

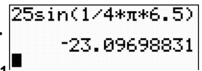


41d De evenwichtsstand $a = 17{,}5$; de amplitude $b = 17{,}5 - 15 = 2{,}5$ en de periode is $12 = \frac{2\pi}{c} \Rightarrow c = \frac{1}{6}\pi$.
De grafiek gaat stijgend door de evenwichtsstand voor $t = 2$ (1 maart) + 3 ($\frac{1}{4}$ periode) $= 5 \Rightarrow d = 5$.

42a De amplitude $b = 25$ en de periode is $8 = \frac{2\pi}{c} \Rightarrow c = \frac{2\pi}{8} = \frac{1}{4}\pi$.

42b Op $t = 0$ is $P'(0, 0)$ en op $t = 2$ is $P'(0, 25)$.

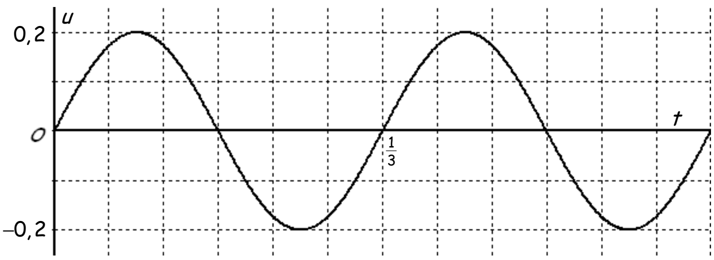
42c $y_{P'} = y_P = 25\sin(\frac{1}{4}\pi t)$.



42d $t = 6{,}5 \Rightarrow y_{P'} = 25\sin(\frac{1}{4}\pi \cdot 6{,}5) \approx -23{,}1$.

43a $u = 0{,}2\sin(6\pi t) = b\sin(\frac{2\pi}{T}t) \Rightarrow$ de amplitude $b = 0{,}2$
en $6\pi = \frac{6\pi}{1} = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} \Rightarrow$ de trillingstijd $T = \frac{1}{3}$ seconde
en de frequentie $f = 3$ Hertz.

43b De periode (de trillingstijd) is $\frac{1}{3}$ seconde.
Zie de grafiek van u over twee perioden hiernaast.



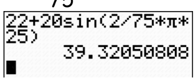
44 $u = 3\sin(60\pi t) \Rightarrow$ de amplitude $b = 3$ en de frequentie $f = 30$ Hertz ($t = 1 \Rightarrow u = 3\sin(60\pi) = 3\sin(30 \cdot 2\pi)$).
De frequentie $f = 30$ Hertz $\Rightarrow$ de trillingstijd $T = \frac{1}{30}$ seconde.

45 $u = 0{,}8\sin(440 \cdot 2\pi t) = 0{,}8\sin(880\pi t)$.

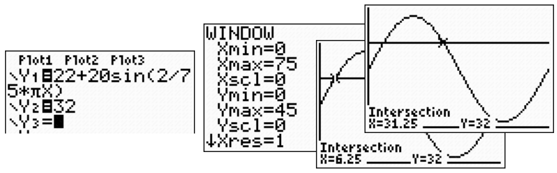
46 $u_1 = 3\sin(0{,}03 \cdot 2\pi t) = 3\sin(0{,}06\pi t)$ met t in ms en u in mm. (3 rondgangen in 100 ms $\Rightarrow$ 0,03 rondgangen in 1 ms). met t in ms
$u_2 = 4\sin(0{,}025 \cdot 2\pi t) = 4\sin(0{,}05\pi t)$ met t in ms en u in mm. (2,5 rondgang in 100 ms $\Rightarrow$ 0,025 rondgangen in 1 ms).

47a $T = 75 \Rightarrow h = (2 + 20) + 20\sin(\frac{2\pi}{75} \cdot t) = 22 + 20\sin(\frac{2}{75}\pi t)$.

47b $t = 25 \Rightarrow h = 22 + 20\sin(\frac{2}{75} \cdot \pi \cdot 25) \approx 39{,}3$ (m).



47c $h = 22 + 20\sin(\frac{2}{75}\pi t) = 32$ (intersect) $\Rightarrow t = 6{,}25 \vee t = 31{,}25.$
$h > 32$ (zie een plot) gedurende $31{,}25 - 6{,}25 = 25$ seconden.



48a $h_A = 22 + 20\sin(\frac{1}{30}\pi t) = 22 + 20\sin(\frac{\pi}{30} t) = 22 + 20\sin(\frac{2\pi}{60}\cdot t) \Rightarrow$ omlooptijd (of trilingstijd of periode) $T = 60$ (sec).

48b Na $\frac{60}{360}\cdot 60 = \frac{1}{6}\cdot 60 = 10$ seconden.

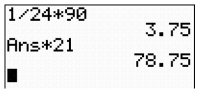
48c $h_B = 22 + 20\sin(\frac{1}{30}\pi(t - 10)).$

49a $x_Q = 20\cos(30\pi(t - \frac{1}{45}))$ en $x_R = 20\cos(30\pi(t - \frac{2}{45})).$

49b $x_Q = 20\cos(30\pi(t + \frac{2}{45}))$ en $x_R = 20\cos(30\pi(t + \frac{1}{45})).$

50a $h_1 = 20 + 18\sin(\frac{2\pi}{90} t)$ ofwel $h_1 = 20 + 18\sin(\frac{1}{45}\pi t).$

50b Stoeltje 2 heeft een faseachterstand van $\frac{1}{24}$ (periode) op stoeltje 1, dat is $\frac{1}{24}\cdot 90 = 3{,}75$ sec.
Dus $h_2 = 20 + 18\sin(\frac{1}{45}\pi(t - 3{,}75))$ en $h_{22} = 20 + 18\sin(\frac{1}{45}\pi(t - 78{,}75)).$

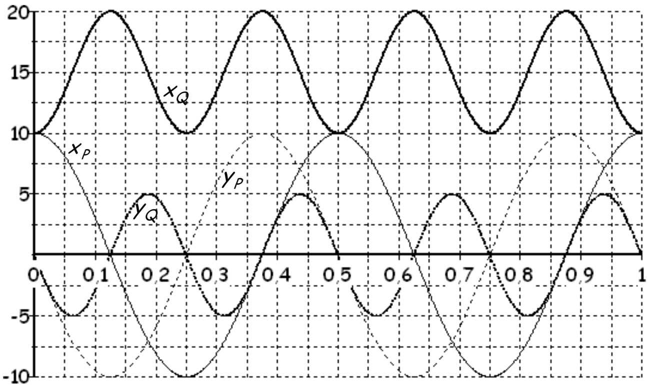


51a De periode van P (en ook van Q en R) is 50 seconden.
P ($t = 12{,}5$) heeft 12,5 seconden voorsprong op Q ($t = 25$) $\Rightarrow$ het faseverschil tussen P en Q is $\frac{12{,}5}{50} = \frac{1}{4}$.
R ($t = 5$) heeft 7,5 seconden voorsprong op P ($t = 12{,}5$) $\Rightarrow$ het faseverschil tussen P en R is $\frac{7{,}5}{50} = \frac{15}{100} = \frac{3}{20}$.
Het faseverschil tussen Q en R is $\frac{12{,}5}{50} + \frac{7{,}5}{50} = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}$.

51b $u_P = 2\sin(\frac{2\pi}{50} t) = 2\sin(\frac{1}{25}\pi t)$; $u_Q = 2\sin(\frac{1}{25}\pi(t - 12{,}5))$ en $u_R = 2\sin(\frac{1}{25}\pi(t + 7{,}5)).$

51c R en Q snijden elkaar bij $t = 15$ (blokje Q gaat omhoog) en $t = 40$ (blokje Q gaat omlaag). We zoeken dus $t = 40$.

51d Tijdens de eerste 50 sec. (één periode) gaan alle drie de blokjes omhoog voor $0 < t < 5$. Dus 10% van de tijd.



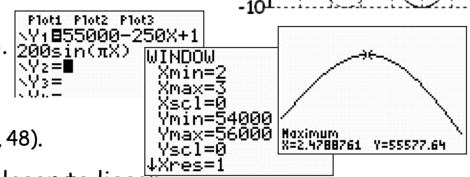
52a Rol II draait in tegenwijzerrichting en draait twee keer zo snel als rol I $\Rightarrow f_{\text{rol II}} = 4$.

52b $x_P = 10\cos(2\cdot 2\pi t) = 10\cos(4\pi t)$ en $y_P = -10\sin(4\pi t).$
$x_Q = 15 - 5\cos(8\pi t)$ en $y_Q = -5\sin(8\pi t).$

52c Zie de grafieken van x_P, x_Q, y_P en y_Q hiernaast.

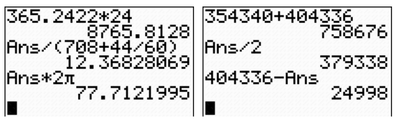
52d De punten P en Q raken elkaar als $x_P = x_Q$ of als P en Q beide in het punt (10, 0) op de x-as zitten.
Dat is bij $t = 0$, $t = 0{,}5$ en $t = 1$.
De grafieken van x_P en x_Q raken elkaar dan.

53a 3 januari loopt van $t = 2$ tot $t = 3$.
$A = 55\,000 - 250t + 1200\sin(\pi t)$
met de optie maximum op $\langle 2, 3\rangle$
geeft $A_{\max} \approx 55\,578$ (km voor $t \approx 2{,}48$).



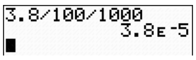
53b De hoogste toppen komen steeds lager te liggen.

54a Het aantal perioden is $\frac{365{,}2422\cdot 24}{708 + \frac{44}{60}} \approx 12{,}368.$

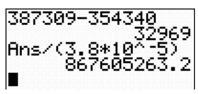


54b $A \approx 379\,338 + 24\,998\sin(77{,}7t)$ want
$a = \frac{354340 + 404336}{2} = 379\,338$, $b = 404\,336 - 379\,338 = 24\,998$, $c = 2\pi \times$ (aantal perioden) $\approx 77{,}7$ en $d = 0$.

54c 3,8 cm $= 3{,}8 \times 10^{-5}$ km $\Rightarrow d = 379\,338 + 3{,}8\cdot 10^{-5} t.$



54d $387\,309 - 354\,340 = 32\,996$ (km). Jaarlijks neemt de afstand aarde-maan met $3{,}8\cdot 10^{-5}$ km toe.
Dus het duurt $\frac{32\,996}{3{,}8\cdot 10^{-5}} \approx 868$ miljoen jaar.



55 tot en met 60 wordt aan de lezer overgelaten.

Diagnostische toets

D1 $A(\cos 40°;\ \sin 40°) \approx A(0{,}77;\ 0{,}64)$. De draaiingshoek van A naar B (alsook van B naar C en van C naar A) is $\frac{360°}{3} = 120°$
$B(\cos 160°;\ \sin 160°) \approx B(-0{,}94;\ 0{,}34)$.
$C(\cos 280°;\ \sin 280°) \approx C(0{,}17;\ -0{,}98)$.

D2a $y_A = \sin\alpha = 0{,}9$. De GR geeft $\sin^{-1}(0{,}9) \approx 64° \Rightarrow$ (zie figuur 8.58) $\alpha \approx 116°$.
D2b $x_B = \cos\alpha = 0{,}9$. De GR geeft $\cos^{-1}(0{,}9) \approx 26° \Rightarrow$ (zie figuur 8.58) $\beta \approx -26°$.
$\angle AOB \approx 116° + 26° = 142°$.

D3a $P(\cos(10), \sin(10)) \approx P(-0{,}84;\ -0{,}54)$.
D3b $P(\cos(5\frac{1}{2}\pi), \sin(5\frac{1}{2}\pi)) = P(\cos(1\frac{1}{2}\pi), \sin(1\frac{1}{2}\pi)) = P(0,\ -1)$.

D4a $\frac{3}{4}\pi\,\text{rad} = \frac{3}{4}\cdot 180° = 135°$.
D4b $\frac{1}{5}\pi\,\text{rad} = \frac{1}{5}\cdot 180° = 36°$.

graden	180	...		...	
radialen	π	$\frac{3}{4}\pi$		0,6	$\frac{2}{3}$

D4c $0{,}6\,\text{rad} = 0{,}6\cdot 180° : \pi \approx 34{,}4°$.
D4d $26\pi\,\text{rad} = 26\cdot 180° = 4\,680°$.
D4e $\frac{2}{3}\pi\,\text{rad} = \frac{2}{3}\cdot 180° = 120°$.
D4f $\frac{2}{3}\,\text{rad} = \frac{2}{3}\cdot 180° : \pi \approx 38{,}2°$.

D5a $270° = \frac{270\cdot\pi}{180}\,\text{rad} = \frac{3}{2}\pi\,\text{rad}$.
D5b $-60° = \frac{-60\cdot\pi}{180}\,\text{rad} = -\frac{1}{3}\pi\,\text{rad}$.

graden	180	270	−60		−70
radialen	π	...	...		...

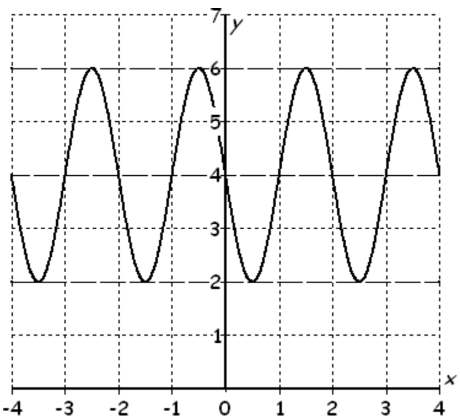
D5c $150° = \frac{150\cdot\pi}{180}\,\text{rad} = \frac{5}{6}\pi\,\text{rad}$.
D5d $330° = \frac{330\cdot\pi}{180}\,\text{rad} = \frac{11}{6}\pi\,\text{rad}$.
D5e $40° = \frac{40\cdot\pi}{180}\,\text{rad} = \frac{2}{9}\pi\,\text{rad}$.
D5f $-70° = \frac{-70\cdot\pi}{180}\,\text{rad} = -\frac{7}{18}\pi\,\text{rad}$.

D6a $\alpha = \sin^{-1}(0{,}73) \approx 0{,}82$. D6b $\alpha = \cos^{-1}(\frac{6}{7}) \approx 0{,}54$. D6c $\alpha = \sin^{-1}(\frac{1}{2}\sqrt{2}) \approx 0{,}79$.

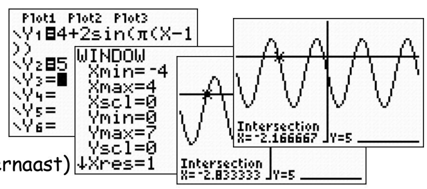
D7a $y = \sin(x)$
.....verm. t.o.v. de x-as met 3
$y = 3\cdot\sin(x)$
.....translatie $(\frac{1}{2}\pi, 2)$
$f(x) = 2 + 3\cdot\sin(x - \frac{1}{2}\pi)$.

D7b $y = \sin(x)$
.....verm. t.o.v. de y-as met $\frac{1}{2}$
$y = \sin(2x)$
.....translatie $(\frac{1}{4}, -3)$
$f(x) = -3 + \sin(2(x - \frac{1}{4}))$.

D8 $y = \cos(x)$
.....translatie $(\frac{3}{4}\pi, 1)$
$y = 1 + \cos(x - \frac{3}{4}\pi)$
.....verm. t.o.v. de y-as met 4
$y = 1 + \cos(\frac{1}{4}x - \frac{3}{4}\pi)$
.....verm. t.o.v. de x-as met -2
$f(x) = -2(1 + \cos(\frac{1}{4}x - \frac{3}{4}\pi)) = -2 - 2\cos(\frac{1}{4}x - \frac{3}{4}\pi)$
ofwel $f(x) = -2 - 2\cos(\frac{1}{4}(x - 2\pi))$.



D9a $f(x) = 4 + 2\sin(\pi(x-1))$
evenwichtsstand 4
amplitude 2
periode $\frac{2\pi}{\pi} = 2$
beginpunt (1, 4). (zie de grafiek hiernaast)



D9b $f(x) = 5$ (intersect) $\Rightarrow x \approx -2{,}83 \vee x \approx -2{,}17 \vee x \approx -0{,}83 \vee x \approx -0{,}17 \vee x \approx 1{,}17 \vee x \approx 1{,}83 \vee x \approx 3{,}17 \vee x \approx 3{,}83$.
$f(x) \geq 5$ (zie een plot/de grafiek) $\Rightarrow -2{,}83 < x < -2{,}17 \vee -0{,}83 < x < -0{,}17 \vee 1{,}17 < x < 1{,}83 \vee 3{,}17 < x < 3{,}83$.

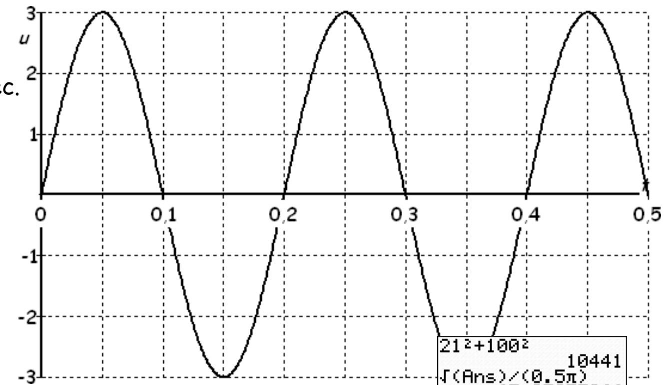
D9c De helling is $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=1} \approx 6{,}28$.

D10a $f(x) = a + b\sin(c(x-d))$ met
evenwichtsstand $a = -10$,
amplitude $b = 10 - -10 = 20$ en
de periode is $40 - 10 = 30 = \frac{2\pi}{c} \Rightarrow c = \frac{2\pi}{30} = \frac{1}{15}\pi$.
De grafiek gaat stijgend door de evenwichtsstand
(beginpunt van sinus) voor $x = 10 \Rightarrow d = 10$.
Een formule: $f(x) = -10 + 20\sin(\frac{1}{15}\pi(x-10))$.

D10b $f(x) = a + b\sin(c(x-d))$ met
$a = -10,\ b = 20$ en $c = \frac{1}{15}\pi$.
De grafiek gaat een hoogste punt
(beginpunt van cosinus) voor $x = 17\frac{1}{2} \Rightarrow d = 17\frac{1}{2}$.
Een formule: $f(x) = -10 + 20\cos(\frac{1}{15}\pi(x - 17\frac{1}{2}))$.

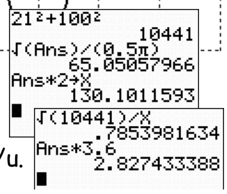
D11a $u = 3\sin(10\pi t) = 3\sin(5 \cdot 2\pi) \Rightarrow$ de amplitude $b = 3$ cm,
de frequentie $f = 5$ Hertz en de trillingstijd $T = \frac{1}{5}$ sec.

D11b Zie de grafiek van u hiernaast.



D11c 0,2 periode is $0{,}2 \cdot \frac{1}{5} = 0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}04$ (sec).
Dus $u_Q = 3\sin(10\pi(t - 0{,}04))$.

D12a De afstand $AB = \sqrt{21^2 + 100^2} = \sqrt{10\,441}$ (m).
De omtrek van het vat ($2\pi r$) is $2\pi \cdot 0{,}25 = 0{,}5\pi$ (m).
Het aantal omwentelingen is $\frac{\sqrt{10441}}{0{,}5\pi} \approx 65$.



D12b Eén omwenteling duurt (aflezen in figuur 8.60b) 2 sec. $\Rightarrow$ na $65,\ldots \times 2 \approx 130$ sec. is het vat in B.

D12c Er wordt dus $\sqrt{10\,441}$ meter afgelegd in 130,1... sec. $\Rightarrow$ de snelheid is $\frac{\sqrt{10441}}{130{,}1\ldots}$ m/s $\approx 2{,}83$ km/u.

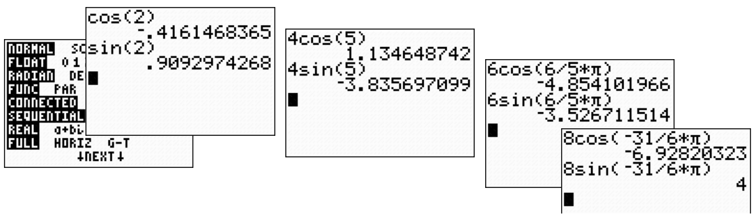
Gemengde opgaven 8. Goniometrie

G34a $P(\cos(2),\ \sin(2)) \approx P(-0{,}42;\ 0{,}91)$.

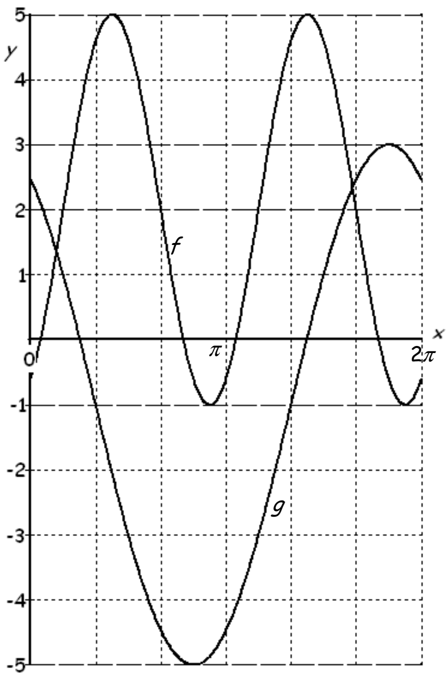
G34b $P(4\cos(5),\ 4\sin(5)) \approx P(1{,}13;\ -3{,}84)$.

G34c $P(6\cos(1\frac{1}{5}\pi),\ 6\sin(1\frac{1}{5}\pi)) \approx P(-4{,}85;\ -3{,}53)$.

G34d $P(8\cos(-5\frac{1}{6}\pi),\ 8\sin(-5\frac{1}{6}\pi)) \approx P(-6{,}93;\ 4)$.

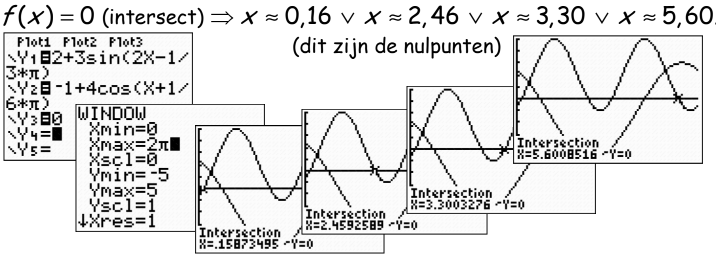


G35a $y = \sin(x)$ en $y = \cos(x)$
.....verm. t.o.v. de x-as met 3 .....verm. t.o.v. de x-as met 4
$y = 3\sin(x)$ $y = 4\cos(x)$
.....translatie $(\frac{1}{3}\pi,\ 2)$ .....translatie $(-\frac{1}{6}\pi,\ -1)$
$y = 2 + 3\sin(x - \frac{1}{3}\pi)$ $g(x) = -1 + 4\cos(x + \frac{1}{6}\pi)$.
.....verm. t.o.v. de y-as met $\frac{1}{2}$ Zie de grafieken hiernaast.
$f(x) = y = 2 + 3\sin(2x - \frac{1}{3}\pi)$
of $f(x) = 2 + 3\sin(2(x - \frac{1}{6}\pi))$.

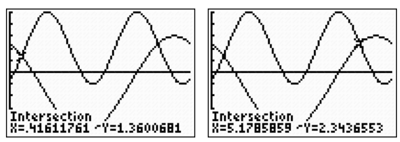


G35b $f(x) = 2 + 3\sin(2(x - \frac{1}{6}\pi))$ en $g(x) = -1 + 4\cos(x + \frac{1}{6}\pi)$
evenwichtsstand 2 evenwichtsstand -1
amplitude 3 amplitude 4
periode $\frac{2\pi}{2} = \pi$ periode 2π
beginpunt $(\frac{1}{6}\pi,\ 2)$. beginpunt $(-\frac{1}{6}\pi,\ 3)$.

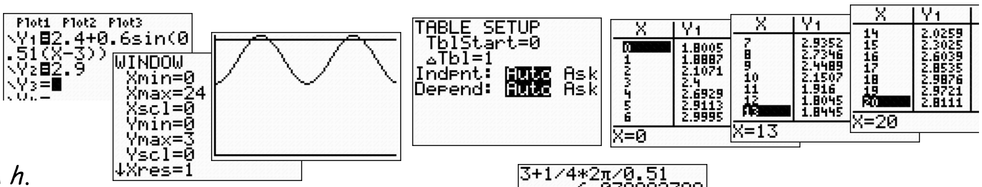
G35c $f(x) = 0$ (intersect) $\Rightarrow x \approx 0{,}16 \vee x \approx 2{,}46 \vee x \approx 3{,}30 \vee x \approx 5{,}60$.
(dit zijn de nulpunten)



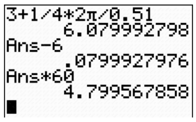
G35d $f(x) = g(x)$ (intersect) $\Rightarrow x \approx 0{,}42 \vee x \approx 5{,}18$.
$f(x) < g(x)$ (zie een plot/grafiek) $\Rightarrow 0 \le x < 0{,}42 \vee 5{,}18 < x \le 2\pi$.

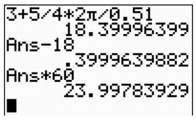


G36a $h = 2{,}4 + 0{,}6\sin(0{,}51(t-3))$
evenwichtsstand 2,4
amplitude 0,6
periode $\frac{2\pi}{0{,}51} \approx 12{,}32$
beginpunt (3; 2,4).
Teken nu zelf de grafiek van h.
(gebruik een plot een TABLE)

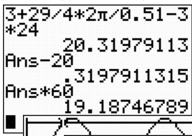


G36b De maxima op 2 mei zijn $\frac{1}{4}$ periode en $1\frac{1}{4}$ periode na het beginpunt.
Dus bij $t = 3 + \frac{1}{4}\cdot\frac{2\pi}{0{,}51} = 6{,}0... \Rightarrow$ om 6:05 en bij $t = 3 + 1\frac{1}{4}\cdot\frac{2\pi}{0{,}51} = 18{,}3... \Rightarrow$ om 18:24.

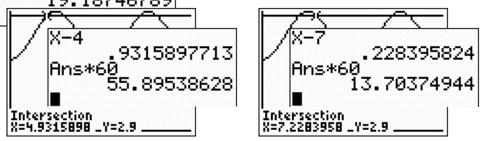




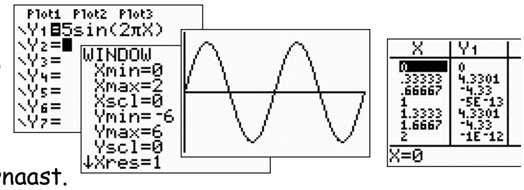
G36c In 1 dag zitten bijna twee perioden.
Dus op 5 mei de eerste keer bij $t = 3 + 6\frac{1}{4}\cdot\frac{2\pi}{0{,}51} - 3\cdot 24$ (zoeken we niet)
en de tweede keer bij $t = 3 + 7\frac{1}{4}\cdot\frac{2\pi}{0{,}51} - 3\cdot 24 \approx 18{,}40 \Rightarrow$ om 20:19.

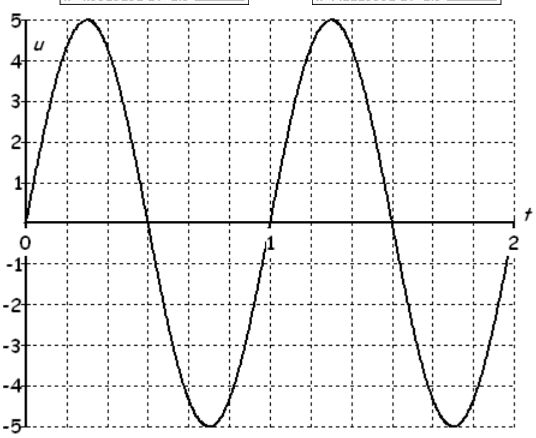


G36d $h = 2{,}9$ (intersect met $0 < t < 12$) $\Rightarrow t = 4{,}9...$ (om 4:56) $\vee\ t = 7{,}2...$ (om 7:14).
$h > 2{,}9$ (zie een plot/grafiek) $\Rightarrow$ tussen 4:56 en 7:14.



G37a $u = 5\sin(2\pi t)$
evenwichtsstand 0 dm
amplitude 5 dm
periode $\frac{2\pi}{2\pi} = 1$ sec
beginpunt (0, 0).
Zie de grafiek hiernaast.





G37b Per seconde (trilling) wordt $4\cdot 5 = 20$ dm afgelegd.
Dus in één minuut $60\cdot 20 = 1200$ dm ofwel 120 meter.

G37c De snelheid op tijdstip $t = 1{,}2$ is $\left[\frac{du}{dt}\right]_{t=1{,}2} \approx 9{,}71$ (dm/s).

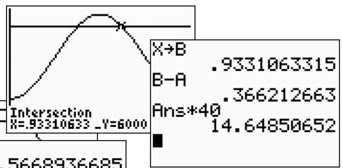
G38a In de figuur G.19 is dat $6\,500 - 1\,500 = 5\,000$ (cm^3).

G38b In figuur G.18 is de periode 6 seconden $\Rightarrow$ 10 ademhalingen per minuut.
Het *minuutvolume* is $10\cdot 500 = 5\,000$ (cm^3, dus 5 liter).
In figuur G.19 is de periode 15 seconden $\Rightarrow$ 4 ademhalingen per minuut.
Het *minuutvolume* is $4\cdot 5\,000 = 20\,000$ (cm^3, dus 20 liter).
De verhouding van het *minuutvolume* bij de ademritmes van figuur G.18 en figuur G.19 is $5\,000 : 20\,000 = 1:4$.

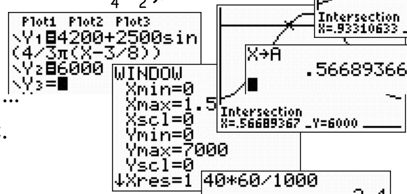
G38c $V = a + b\sin(c(t-d))$ met a (= evenwichtsstand = $\frac{\max + \min}{2}$) $= \frac{4000+3500}{2} = 3\,750$; b (= amplitude) $= 4\,000 - 3\,750 = 250$;
c (= $\frac{2\pi}{\text{periode}}$) $= \frac{2\pi}{6} = \frac{1}{3}\pi$ en $d = 0$ (sinus gaat stijgend door de evenwichtsstand voor $t = 0$) $\Rightarrow V = 3\,750 + 250\sin(\frac{1}{3}\pi t)$.

G38d $V = a + b\cos(c(t-d))$ met a (= evenwichtsstand) $= \frac{6500+1500}{2} = 4\,000$; b (= amplitude) $= 6\,500 - 4\,000 = 2\,500$;
c (= $\frac{2\pi}{\text{periode}}$) $= \frac{2\pi}{15} = \frac{2}{15}\pi$ en $d = \frac{15}{4}$ (cosinus heeft maximum voor $t = \frac{15}{4}$) $\Rightarrow V = 4\,000 + 2\,500\cos(\frac{2}{15}\pi(t - \frac{15}{4}))$.

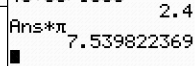
G38e $V = a + b\sin(c(t-d))$ met a (= evenwichtsstand) $= 4\,200$ (gegeven); b (= amplitude) $= 2\,500$;
(de periode van één ademhaling is $1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ seconde, want er zijn 40 ademhalingen per minuut $\Rightarrow$)
c (= $\frac{2\pi}{\text{periode}}$) $= \frac{2\pi}{1{,}5} = \frac{20}{15}\pi = \frac{4}{3}\pi$ en $d = \frac{3}{8}$ (deze sinus heeft beginpunt voor $t = \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2}$).
Dus $V = 4\,200 + 2\,500\sin(\frac{4}{3}\pi(t - \frac{3}{8}))$.



G38f $4\,200 + 2\,500\sin(\frac{4}{3}\pi(t - \frac{3}{8})) = 6\,000 \Rightarrow t \approx 0{,}56... \vee\ t \approx 0{,}93...$
Per ademhaling 0,36... sec. $\Rightarrow$ per minuut $40\cdot\text{Ans} \approx 14{,}6$ sec.



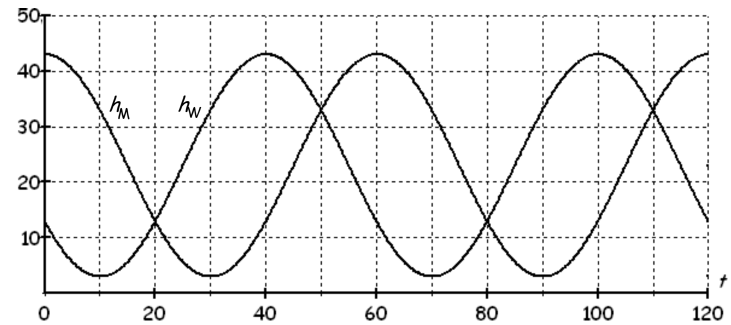
G39a De omtrek van het rad ($2\pi r$) is $2\pi\cdot 20 = 40\pi$ m.
De snelheid is 40π m/min $\Rightarrow$ (ongeveer) $40\pi\cdot 60 : 1000 = 2{,}4\pi \approx 7{,}5$ km/u.



G39b $h = a + b\cos(ct)$, want op $t = 0$ is het bakje in het hoogste punt.
Evenwichtsstand $a = 23$, amplitude $b = 20$ en de periode is $60 = \frac{2\pi}{c} \Rightarrow c = \frac{2\pi}{60} = \frac{1}{30}\pi$.
Een passende formule is $h_M = 23 + 20\cos(\frac{1}{30}\pi t)$.

G39c 12 van de 36 bakjes eerder $\Rightarrow$ de fasevoorsprong is $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$. Hierbij hoort $t = \frac{1}{3}\cdot 60 = 20$.
Dus $h_W = 23 + 20\cos(\frac{1}{30}\pi(t + 20))$.

G39d Zie de grafieken hiernaast.



G39e $h_M = h_W$ (intersect) $\Rightarrow t = 20 \vee t = 20 + 60 = 80.$
(het bakje van Willeke stijgt).

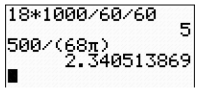
G40a $f(x) = a + b\sin(c(x - d))$ met
evenwichtsstand $a = \frac{3{,}5 + -1{,}5}{2} = 1$, amplitude $b = 3{,}5 - 1 = 2{,}5$ en de periode is $1\frac{1}{3}\pi = \frac{2\pi}{c} \Rightarrow c = \frac{2\pi}{1\frac{1}{3}\pi} = \frac{6\pi}{4\pi} = 1{,}5.$

De grafiek gaat stijgend door de evenwichtsstand (beginpunt van sinus) voor $x = \frac{1}{3}\pi \Rightarrow d = \frac{1}{3}\pi.$

Een passende formule is $f(x) \approx 1 + 2{,}5\sin(1{,}5(x - \frac{1}{3}\pi)).$

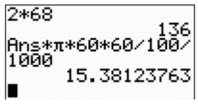
G40b $N(t) = a + b\cos(c(t - d))$ met
evenwichtsstand $a = \frac{40 + 0}{2} = 20$, amplitude $b = 40 - 20 = 20$ en de periode is $(7 - 1) \times 2 = 12 = \frac{2\pi}{c} \Rightarrow c = \frac{2\pi}{12} = \frac{1}{6}\pi.$
De grafiek gaat een hoogste punt (beginpunt van cosinus) voor $t = 1 \Rightarrow d = 1.$
Een passende formule is $N(t) \approx 20 + 20\cos(\frac{1}{6}\pi(t - 1)).$

G41a De omtrek van het wiel ($2\pi r$) is $2\pi \cdot 34 = 68\pi$ cm. (de snelheid van 18 km/u = 5 m/s = 500 cm/s)
Dus per seconde $\frac{500}{68\pi} \approx 2{,}34$ keer rond.

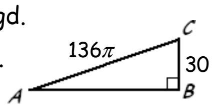


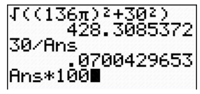
G41b $h = a + b\sin(ct)$, want op $t = 0$ is de ventiel helemaal rechts (op de evenwichtsstand en heeft een positieve draairichting).
Evenwichtsstand $a = 34$, amplitude $b = 30$ en de frequentie is $\frac{500}{68\pi} = \frac{c}{2\pi} \Rightarrow c = \frac{1000\pi}{68\pi} = \frac{500}{34} = \frac{250}{17}.$
Een passende formule is $h = 34 + 30\sin(\frac{250}{17}t).$

G41c Lees in figuur G.22 af: het wiel draait één keer rond in $\frac{1}{2}$ seconde $\Rightarrow$ twee keer rond in 1 seconde.
De snelheid is $2 \cdot 68\pi = 136\pi$ cm/s. Dit is (ongeveer) 15,4 km/u.

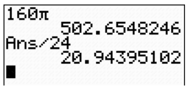


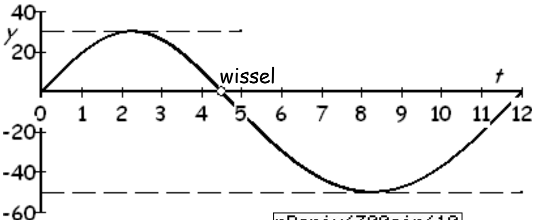
G41d Lees in figuur G.22 af: in 1 seconde 30 cm gestegen. Er is dan 136π cm afgelegd.
$AB^2 + BC^2 = AC^2 \Rightarrow AB^2 = AC^2 - BC^2 \Rightarrow AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{(136\pi)^2 - 30^2}.$
De helling is $\frac{BC}{AB} \approx 0{,}07 = 7\%.$





G42a De lengte van de baan is $2\pi \cdot 30 + 2\pi \cdot 50 = 160\pi$ (cm).
De snelheid van de trein is $\frac{160\pi}{24} \approx 21$ cm/s.

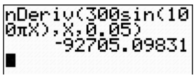




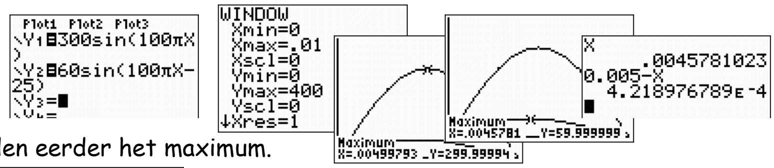
G42b $y_P = 30\sin(\frac{2}{9}\pi t)$ $(0 < t < 4{,}5)$. (de periode is $\frac{3}{8} \cdot 24 = 9 = \frac{2\pi}{c} \Rightarrow c = \frac{2\pi}{9} = \frac{2}{9}\pi$)

G42c Voor $4{,}5 < t < 12$ is de amplitude 9. (bij $t = 12$ is de halve baan afgelegd)

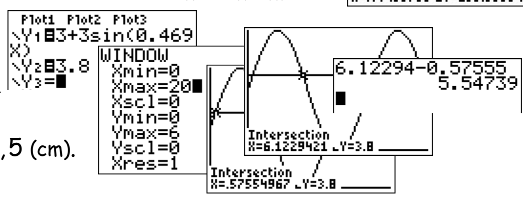
G43a De helling op tijdstip $t = 0{,}05$ is $\left[\frac{dV}{dt}\right]_{t=0{,}05} \approx -92\,705$ (negatief) $\Rightarrow$ de spanning V neemt af.



G43b $V = 300\sin(100\pi t)$ (optie maximum) $\Rightarrow$
(eerste maximum na $t = 0$ voor) $t = 0{,}005.$
$V^* = 60\sin(100\pi t - 25)$ (optie maximum) $\Rightarrow$
(eerste maximum na $t = 0$ voor) $t \approx 0{,}0046.$
V^* bereikt $0{,}005 - 0{,}0046 = 0{,}0004$ seconden eerder het maximum.



G44a $y = 3 + 3\sin(0{,}469x) = 3{,}8$
(met intersect de twee snijpunten naast één top) $\Rightarrow$
$x \approx 0{,}57555$ of $x \approx 6{,}12294.$
Dus de breedte van het blokje is (ongeveer) 5,5 (cm).



G44b $SQ = \sqrt{55^2 + 67^2} \approx 86{,}68.$
S ligt even hoog als P; hetzelfde aantal golven; even hoge toppen; enz.
De nieuwe grafiek is een horizontale uitrekking van G.26 met factor $\frac{86{,}68}{67}.$

$y = 3 + 3\sin(0{,}469x) \xrightarrow{\text{verm. } y\text{-as, } \frac{86{,}68}{67}} y = 3 + 3\sin(0{,}469 \cdot \frac{67}{86{,}68}x).$
Dus een mogelijke formule is $y = 3 + 3\sin(0{,}363x).$